EduBreakout „Ganzrationale Funktionen – Symmetrie und Nullstellen“ für Klasse 11 Mathematik

Aufbau, Arbeitsblätter und Lösungen

Aufbau des Breakouts, benötigtes Material und Lösungen:

Aufbau:
- Das Breakout ist für 6 Gruppen (idealerweise max. 4 Personen pro Gruppe) konzipiert.
- Jede Gruppe muss ein Schloss öffnen.
- Dafür muss jede Gruppe zwei Rätsel lösen und bekommt durch das erste Rätsel die erste Ziffer des Codes und durch das zweite die weiteren beiden Ziffern genannt.
- Es gibt ein Zusatzschloss mit einem vierstelligen Zahlencode, das von schnellen Gruppen geöffnet werden kann.
- Zeitbedarf: ca. 60 Min

Material:
- Einstiegsnachricht: In meinem Fall war es eine Nachricht des Nikolauses, der am 6.12. eine Überraschung bereitgestellt hat, aber die Codes der Schlösser vergessen hat: https://www.synthesia.io/santa-share?videoId=fa8cd682-4bf1-4598-a2ba-050266aeecd8
- Schatzkiste mit Überraschung
- 6 Schlösser nummeriert für 6 Gruppen (mit dreistelligem Code)
- 1 Schloss mit vierstelligem Code für das Zusatzrätsel
- Material pro Gruppe: Kopie mit zwei QR-Codes (kleiner Code und größerer Code zum Ausmalen), Arbeitsblatt (doppelseitig) und Zauberstift (UV-Stift), zusätzlich eine geheime Botschaft auf einem farbigen Papier mit dem Zauberstift: „Malt alle Zahlen aus, die sich als Lösungen der Gleichungen (unabhängig von ihrem Vorzeichen) ergeben."

Codes der Schlösser: 812; 626; 142; 967; 551; 395

Lösungen:

Rätsel 1: Symmetrien:
Lösung:
Die Graphen zu den Funktionen 5 und 6 (Aufgabenteil c vom Arbeitsblatt) sind punktsymmetrisch zum Ursprung. Es muss der erste (kleine) QR-Code gescannt werden. Damit kommt man zu einer LearningApp, bei der 5+6 eingegeben werden muss. Dadurch erhält man die erste Ziffer des Codes.

Lösungszahlen, die als Ergebnis in der LearningApp nach Eingabe genannt werden:
G1: 8
G2: 6
G3: 1
G4: 9
G5: 5
G6: 3

Rätsel 2: Nullstellen
Auf dem Ausmalcode müssen alle Zahlen (alle Zahlen, unabhängig vom Vorzeichen) ausgemalt werden, die sich als Lösung der Gleichungen von Aufgabe 2 auf dem Arbeitsblatt ergeben. Der QR-Code zeigt eine zweistellige Zahl an. Das sind die weiteren beiden Ziffern des Codes des Schlosses.

Lösung: Die Zahlen 0, 1, 2, 4, 6, 8 müssen ausgemalt werden.

G1: Lösungszahl hinter ausgemaltem QR-Code: 12

Auszumalen sind: 0, 1, 2, 4, 6, 8

NICHT auszumalen sind: 3, 5, 7

G2: Lösungszahl hinter ausgemaltem QR-Code: 26

Auszumalen sind: 0, 1, 2, 4, 6, 8

NICHT auszumalen sind: 3, 5, 7

G3: Lösungszahl hinter ausgemaltem QR-Code: 42

Auszumalen sind: 0, 1, 2, 4, 6, 8

NICHT auszumalen sind: 3, 5, 7

G4: Lösungszahl hinter ausgemaltem QR-Code: 67

Auszumalen sind: 0, 1, 2, 4, 6, 8
NICHT auszumalen sind: 3, 5, 7

G5: Lösungszahl hinter ausgemaltem QR-Code: 51

Auszumalen sind: 0, 1, 2, 4, 6, 8
NICHT auszumalen sind: 3, 5, 7

G6: Lösungszahl hinter ausgemaltem QR-Code: 95

Auszumalen sind: 0, 1, 2, 4, 6, 8
NICHT auszumalen sind: 3, 5, 7

Zusatzrätsel 3:
Lösung: alle vier Nullstellen ohne Vorzeichen; CODE des Schlosses: 2233

Material: QR-Codes zur Aufgabe an die Gruppen:

Gruppe 1:

3	5	7	7	1	7	1	7	4	7	3
1	1	6	7	5	6	7	2	0	0	8
5	3	2	0	7	5	5	0	2	4	7
1	7	7	8	1	3	7	7	6	3	7
3	7	7	3	3	7	7	0	0	4	2
7	8	5	0	3	6	6	8	5	3	0
3	2	8	0	7	7	2	6	3	7	6
4	8	7	3	0	7	5	4	5	8	4
3	7	3	1	8	4	7	2	7	4	3
4	1	3	6	3	1	1	7	2		
7	8	4	7	5	4	6	6	6		

Gruppe 2:

3	2	4	4	5	8	1	5	7	6	3
0	6	0	7	3	1	7	6	5	7	2
3	3	8	1	1	3	2	7	5	5	0
4	2	7	5	2	5	6	1	3	5	5
2	7	2	4	7	4	8	3	7	8	1
8	3	4	3	6	6	5	6	6	5	3
3	7	2	3	7	5	5	0	8	8	3
7	8	2	0	5	4	5	7	4	5	5
8	7	3	0	3	7	5	7	2	7	0
2	2	7	4	5	6	3	3	5		
3	1	7	7	4	5	7	4	5		

Gruppe 3:

5	3	8	5	3	5	2	5	0	3	3
4	2	5	1	2	5	3	4	8	1	1
7	7	3	8	1	6	5	2	2	6	7
7	6	1	4	4	6	5	5	0	3	7
7	5	8	2	3	8	5	8	4	0	0
6	2	1	5	7	5	4	0	7	3	8
2	7	4	3	8	5	8	1	7	3	8
3	1	0	0	8	0	3	1	7	4	0
7	7	0	5	7	4	0	1	7	4	3
6	0	5	0	4	3	5	2	8		
7	8	7	7	6	6	5	6	6		

Gruppe 4:

3	8	7	4	8	2	5	6	0	7	3
5	6	3	1	2	5	8	8	0	7	0
5	1	4	7	8	4	5	1	0	2	7
2	5	7	7	7	6	5	2	6	5	0
2	3	2	7	3	7	3	4	2	7	5
8	3	0	0	5	3	4	6	3	7	2
7	4	8	7	1	3	1	5	3	7	8
7	7	7	5	0	5	1	8	3	5	2
4	7	7	0	1	7	3	7	3	6	3
0	0	1	3	5	7	2	8	1		
5	8	1	5	1	6	0	7	4		

Gruppe 5:

3	5	7	2	8	5	1	7	5	2	5
3	2	3	7	3	7	2	5	3	2	8
1	1	4	0	7	2	1	8	4	7	7
3	5	6	7	0	2	7	3	4	8	2
3	4	8	3	7	3	3	6	7	5	5
4	1	0	2	1	1	8	2	2	1	5
0	8	3	2	3	1	7	3	5	5	1
8	3	1	5	8	5	7	3	7	3	7
3	7	7	0	1	4	5	4	0	0	0
3	5	5	0	5	2	5	3	7		
7	6	1	5	6	8	2	5	4		

Gruppe 6:

3	2	4	4	8	1	8	5	5	0	7
0	6	0	1	3	1	7	2	7	3	8
7	4	0	5	3	0	0	5	5	5	0
4	7	2	1	5	6	1	2	5	5	7
7	0	7	2	4	7	4	3	7	8	1
8	3	4	3	6	7	5	6	6	5	3
3	7	3	7	5	5	3	8	8	2	7
8	2	0	6	4	5	0	5	0	7	7
2	3	3	7	5	7	2	7	0	3	8
7	3	1	6	3	3	6	8	3		
7	2	1	4	8	5	4	6	5		

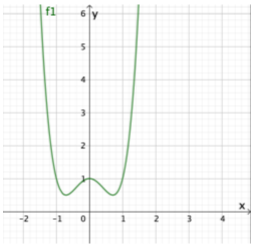
Arbeitsblatt:

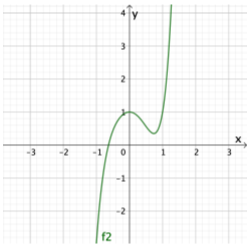
Rätsel 1: Symmetrien

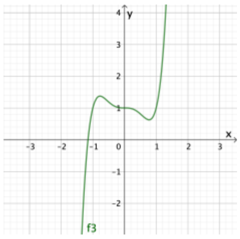
Zu Erinnerung:
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
Der Graph der Funktion g mit $g(x) = x^3$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

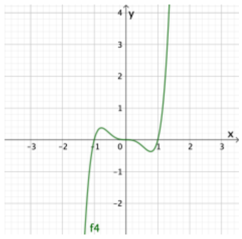
Aufgabe:

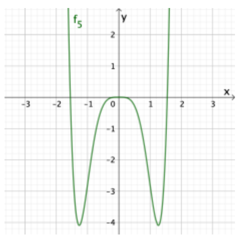
a) Entscheidet, welche der Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung und welche weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse sind.
Achtung: Einer der Graphen ist zwar punktsymmetrisch, aber nicht zum Ursprung. Welcher ist das?











b) Betrachtet nun die zugehörigen Funktionsgleichungen und erläutert, wie man nur unter Beachtung der Exponenten eines Funktionsterms herausfinden kann, ob der zugehörige Graph achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

$f_1(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$ $\quad f_2(x) = 2x^5 - 2x^2 + 1$ $\quad f_3(x) = 2x^5 - 2x^3 + 1$

$f_4(x) = 2x^5 - 2x^3$ $\quad f_5(x) = 2x^6 - 4{,}8x^4$

Symmetrie der Graphen von ganzrationalen Funktionen:

c) Achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung oder weder noch?

$g_1(x) = 2x^7 - 2x^2$ $\quad g_2(x) = 2x^6 - 2x^2 + 1$ $\quad g_3(x) = 2x^6 - 2x^8 - 1$

$g_4(x) = -x^4 - 2x^2$ $\quad g_5(x) = 2x^5 - x$ $\quad g_6(x) = 2x^5 - 2x^3$

Rätsel 2: Nullstellen

Es sollen die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x^2$ bestimmt werden.
Hier ein möglicher Lösungsweg:

Ansatz: $f(x) = 0$

$2x^4 + 4x^3 - 2x^2 = 0$

Ziel: Größtmöglichen Faktor ausklammern!

$x^2(2x^2 + 4x - 2) = 0$

$x^2 = 0$ oder $2x^2 + 4x - 2 = 0$

$x_1 = 0$

$2x^2 + 4x - 2 = 0 \quad |:2$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

Das Lösungsverfahren hängt von der Art der Gleichung ab, die nach dem Faktorisieren „übrig" bleibt.

Lösen der quadratischen Gleichung mit der p-q-Formel ergibt:

$x_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1+1}$

$x_2 = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}41$

$x_3 = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}41$

Die Funktion f hat daher die drei Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$, $x_3 = -1 - \sqrt{2}$.

Aufgabe 2:
Bestimme alle Nullstellen der Funktionen f, g und h.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 24x \qquad g(x) = (x-1)\cdot(x-8)\cdot(x+2) \qquad h(x) = x^4 - 4x^2$$

Zusatzrätsel 3 für die Schnellen (schwarzes vierstelliges Schloss):
Löse die Gleichung. Es ergeben sich vier Lösungen, die den vierstelligen Code des Zusatzschlosses darstellen.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Eine solche Gleichung nennt man **biquadratische Gleichung**. Man löst sie, indem man x^2 durch eine andere Variable, z.B. durch u, ersetzt (Substitution). Damit kann man die biquadratische Gleichung in eine quadratische Gleichung umwandeln und die quadratische Gleichung mit bekannten Lösungsverfahren lösen.

Beispiel: $4x^4 + 3x^2 - 27 = 0$

Substitution: $x^2 = u \qquad x^4 = (x^2)^2 = u^2$

$4u^2 + 3u - 27 = 0$

Lösen der quadr. Gleichung (z.B. mit der p-q-Formel) ergibt:

$u = \frac{9}{4}$ oder $u = -3$

Rücksubstitution: $u = x^2 = \frac{9}{4}$ oder $u = x^2 = -3$

↳ keine Lösung (in $\mathbb{R}$)

Löse $x^2 = \frac{9}{4}$: $\quad x^2 = \frac{9}{4} \quad |\sqrt{\ }$

$x_1 = \frac{3}{2} \qquad x_2 = -\frac{3}{2}$

Anmerkung: Hier ergeben sich 2 Lösungen der Gleichung. Maximal können sich 4 Lösungen ergeben.